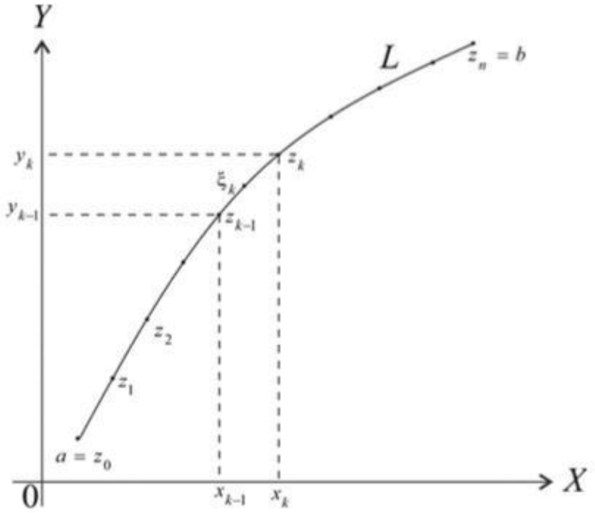
Лекция 6. Комплекс айнымалы функцияларды интегралдау

Жоспар:

1. Комплекс айнымалы функцияларды интегралдау
2. Коши теоремасы
3. Ньютон-Лейбниц формуласы
4. Мысалдар

L қисығы және осы қисықта анықталған үзіліссіз $f(z)$ функциясы берілсін.

L қисығын $a = z_0,\ z_1, z_2, ..., z_{n-1}, z_n = b$ нүктелері арқылы n бөлікке бөлеміз (11-сурет).



11-сурет

Әр $[z_{k-1}, z_k]$ аралығынан ζ_k нүктесін таңдап алып, $\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$ интегралдық қосындысын құрамыз, мұнда $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

Егер $z_{k-1}z_k$ доғаларының ең үлкенінің ұзындығы нөлге ұмтылғанда интегралдық қосындының шегі табылса, онда ол $f(z)$ функциясының L қисығының бойымен алынған интегралы деп аталады және $\int_L f(z)dz$ арқылы белгіленеді.

Демек,

$$\int_L f(z)dz = \lim_{\substack{\max|\Delta z_k|\to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \tag{8.1}$$

Егер $L-$ тегіс қисық, ал $f(z)-$ үзіліссіз функция болса, онда (8.1) интегралдық қосындының табылатынын көрсетейік. Егер төмендегі белгілеулерді ескерсек,

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y),\ z = x + iy,\ z_k = x_k + iy_k,$$
$$\Delta z_k = (x_k + iy_k) - (x_{k-1} + iy_{k-1}) = \Delta x_k + i\Delta y_k,$$
$$\zeta_k = \xi_k + i\eta_k,\ u(\xi_k,\eta_k) = u_k,\ v(\xi_k,\eta_k) = v_k$$

онда

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}(u_k + iv_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k) + i\sum_{k=1}^{n}(u_k\Delta y_k + v_k\Delta x_k)$$

Соңғы теңдіктің оң жағындагы қосындылар сәйкес қисық сызықты интегралдар үшін интегралдық қосындылар болып табылады.

L қисығы тегіс және $f(z)$ функциясы үзіліссіз болғанда бұл қосындылар табылады. Соңғы қосындыда $\max|\Delta z_k|$ нөлге ұмтылғанда шекке көшсек, келесі теңдікке келеміз:

$$\int_L f(z)dz = \int_L udx - vdy + i\int_L vdx + udy \tag{8.2}$$

(8.2) формуладан көретініміз: комплекс айнымалы функцияның интегралын есептеу нақты айнымалы функциядан қисық сызықты интеграл есептеуге келіп тіреледі.

(8.2) формуланы келесі ыңғайлы түрде жазуға болады:

$$\int_L f(z)dz = \int_L (u+iv)(dx+idy) \tag{8.3}$$

Егер L қисығы $x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha \le t \le \beta$ параметрлік теңдеуімен берілсе, онда $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ теңдеуі $L-$ қисығының комплекс параметрлік теңдеуі деп аталады және (8.3)-формула келесі түрде жазылады:

$$\begin{aligned}\int_L f(z)dz &= \int_\alpha^\beta (u+iv)(x'(t)+iy'(t))dt = \\ &= \int_\alpha^\beta f(z(t))\cdot z'(t)dt.\end{aligned} \tag{8.4}$$

Енді комплекс айнымалы функцияның интегралының негізгі қасиеттерін келтірейік:

1. $\int_a^b dz = b - a,$

$$\sum_{k=1}^n \Delta z_k = \sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) = z_1 - z_0 + z_2 - z_1 + \ldots + z_n - z_{n-1} =$$
$$= z_n - z_0 = b - a,$$

олай болса

$$\int_L dz = b - a;$$

Берілген интеграл L қисығының алғашқы және соңғы нүктесіне ғана тәуелді, демек интегралдау жолына тәуелсіз.

Егер $a = b$ болса,онда $\int_L dz = 0,$ яғни тұйық контур бойымен интеграл нөлге тең.

2. $\int_{AB} f(z)dz = -\int_{BA} f(z)dz$ (интегралдау бағыты өзгергенде интегралдың таңбасы өзгереді)

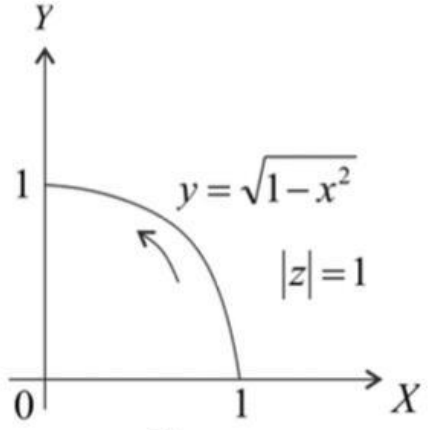
3. $\int_L (af_1(z) + bf_2(z))dz = a\int_L f_1(z)dz + a\int_L f_2(z)dz$, мұнда $a, b-$ комплекс сандар.

4. $\int_L f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz,$ мұнда $L = L_1 + L_2;$ L_1 мен L_2- қисықтарының ортақ нүктелері жоқ.

5. Егер L қисығының барлық нүктелерінде $|f(z)| \le M$ теңсіздігі

орындалса, онда $|\int_L f(z)dz| \le M\,l,$ мұнда $M = const,\ l-$ дегеніміз L қисығының ұзындығы.

1-мысал. $\int_L \frac{z}{\bar{z}}dz$ интегралын есептеңіз, мұнда $L-$ $|z|=1$ шеңберінің I-ширектегі бөлігі, $0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$. Интегралдау бағыты сағат бағытына қарсы (12-сурет)



12-сурет

Шешуі. *1-әдіс.* (8.3)формуласын қолданайық:

$$\int_L \frac{x+iy}{x-iy}(dx+idy) =$$

$$=\int_L \frac{x^2-y^2+2xyi}{x^2+y^2}(dx+idy)$$

$x^2+y^2=1,\ y=\sqrt{1-x^2},\ dy=-\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ және $x-$тің 1-ден 0-ге дейін өзгеретінін ескереміз.

$$\int_L \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dx - \frac{2xy}{x^2+y^2}dy\right) + i\int_L \left(\frac{2xy}{x^2+y^2}dx + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dy\right) =$$

$$= \int_1^0 \left(2x^2-1+2x\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx +$$

$$+ i\int_1^0 \left(2x\sqrt{1-x^2}-(2x^2-1)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx =$$

$$= \int_1^0 (4x^2-1)dx + i\int_1^0 \frac{(3-4x^2)xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \left(4\cdot\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_1^0 + i\left(-2\cdot\frac{2(1-x^2)^{3/2}}{3} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{1-x^2}\right)\Big|_1^0 = -\frac{1}{3} - i\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}(1+i).$$

2-әдіс. $|z|=1$ шеңберінің параметрлік теңдеуі $x=\cos t,\ y=\sin t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

түрінде жазылатынын ескерейік.

$$\int_L \frac{z}{\bar z}dz = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t + i\sin t}{\cos t - i\sin t}(-\sin t + i\cos t)dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2}(\cos^2 t + 2i\sin t\cos t - \sin^2 t)(-\sin t + i\cos t)dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2}(\sin^3 t - 3\cos^2 t\sin t)dt + i\int_0^{\pi/2}(\cos^3 t - 3\sin^2 t\cos t)dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2}((1-\cos^2 t)\sin t - 3\cos^2 t\sin t)dt + i\int_0^{\pi/2}((1-\sin^2 t)\cos t - 3\sin^2 t\cos t)dt =$$

$$= \left(-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3} + \cos^3 t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} + i\left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3} - \sin^3 t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3}(1+i);$$

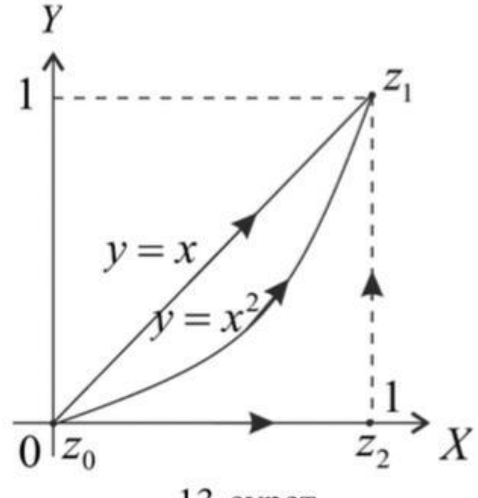
3-әдіс. z комплекс санын көрсеткіштік түрде жазайық: $z = re^{i\varphi}$, онда $\bar z = re^{-i\varphi}$.

Егер $|z| = 1$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ екенін ескерсек, $z = e^{i\varphi}$, $\bar z = e^{-i\varphi}$, $dz = ie^{i\varphi}d\varphi$

$$\int_L \frac{z}{\bar z}dz = \int_0^{\pi/2} \frac{e^{i\varphi}}{e^{-i\varphi}} \cdot ie^{i\varphi}d\varphi = i \cdot \frac{1}{3i}e^{3i\varphi}\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(e^{\frac{3\pi}{2}i} - 1\right) = \frac{1}{3}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} - 1\right) = -\frac{1}{3}(1+i).$$

2-мысал. $\int_L (z^2 - 2\bar z)dz$ интегралын есептеңіз. Мұнда L интегралдау жолы: а) $z_0 = 0$, $z_1 = 1 + i$ нүктелерін қосатын түзу, в) $z_0 = 0$, $z_1 = 1 + i$ нүктелерін қосатын $y = x^2$ парабола доғасы, с) $z_0 = 0$ нүктесінен $z_2 = 1$ нүктесіне дейін, сонан соң $z_2 = 1$ нүктесінен $z_1 = 1 + i$ нүктесіне дейінгі кесінділер (13-сурет)



13-сурет

Шешуі. а) z_0 және z_1 нүктелерін қосатын түзудің теңдеуі $y = x$, $0 \le x \le 1$. (8.2) формула бойынша

$$\int_L (x^2+2xyi-y^2-2(x-iy))d(x+iy)=$$
$$=\int_L (x^2-y^2-2x+i(2xy+2y))(dx+idy)=$$
$$=\int_L (x^2-y^2-2x)dx-(2xy+2y)dy+i\int_L (2xy+2y)dx+(x^2-y^2-2x)dy$$

$y=x,\ dy=dx,\ 0\le x\le 1$ екенін ескерсек, онда

$$\int_0^1(-4x-2x^2)dx+i\int_0^1 2x^2dx=-2x^2-2\frac{x^3}{3}+i\frac{2x^3}{3}\Bigg|_0^1=-\frac{8}{3}+\frac{2}{3}i$$

в) $y=x^2,\ 0\le x\le 1,\ dy=2xdx$ теңдіктерін қолданайық.

$$\int_0^1(x^2-5x^4-2x-4x^3)dx+i\int_0^1(4x^3-2x^2-2x^5)dx=$$
$$=\frac{x^3}{3}-x^5-x^2-x^4+i\left(x^4-2\frac{x^3}{3}-2\frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^1=$$
$$=\frac{1}{3}-3+i\left(1-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)=-\frac{8}{3};$$

с) z_0z_2 түзуінің бойында $y=0,\ 0\le x\le 1,\ dy=0$, ал z_2z_1 түзуінің бойында $x=1,\ 0\le y\le 1,\ dx=0,$ екенін ескеру қажет.

1) $$\int_0^1(x^2-2x)dx+i\int_0^1 0dx=\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_0^1=-\frac{2}{3};$$

2) $$\int_0^1(-2y-2y)dy+i\int_0^1(-y^2-1)dy=$$
$$=-2y^2+i\left(-\frac{y^3}{3}-y\right)\Bigg|_0^1=-2-\frac{4}{3}i;$$

Екі интегралды қоссақ, онда

$$\int_L (z^2-2\overline{z})dz=-\frac{2}{3}-2-\frac{4}{3}i=-\frac{8}{3}-\frac{4}{3}i.$$

Қисық сызықты интегралдар үшін математикалық талдау курсынан белгілі келесі теореманы келтірейік: Егер $P(x,y)$ және $Q(x,y)$ функцияларыжәне олардың $\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$ дербес туындылары L қисығымен шектелген D облысында үзіліссіз болса, онда

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy \tag{8.5}$$

Соңғы формуланы *Остроградский-Грин формуласы* деп атайды.

Енді негізгі теоремаға көшейік.

Коши теоремасы. Егер $f(z)$ функциясы L қисығымен шектелген бірбайланысты D облысында аналитикалық жәнетұйық $\overline{D}$ облысында үзіліссіз болса, онда

$$\oint_L f(z)dz=0 \tag{8.6}$$

Дәлелдеу. (8.2) формуласы бойынша

$$\oint_L f(z)dz = \oint_L udx - vdy + i\oint_L vdx + udy$$

$f(z)$ функциясы L қисығының ішіндегі D облысында аналитикалық болғандықтан, u және v функцияларының дербес туындылары бар және Коши-Риман шарты орындалады. (8.5) формуласын және Коши-Риман шартын ескерсек, онда

$$\oint_L udx - vdy = \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy = 0$$

$$\oint_L vdx + udy = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy = 0$$

Демек, теорема дәлелденді.

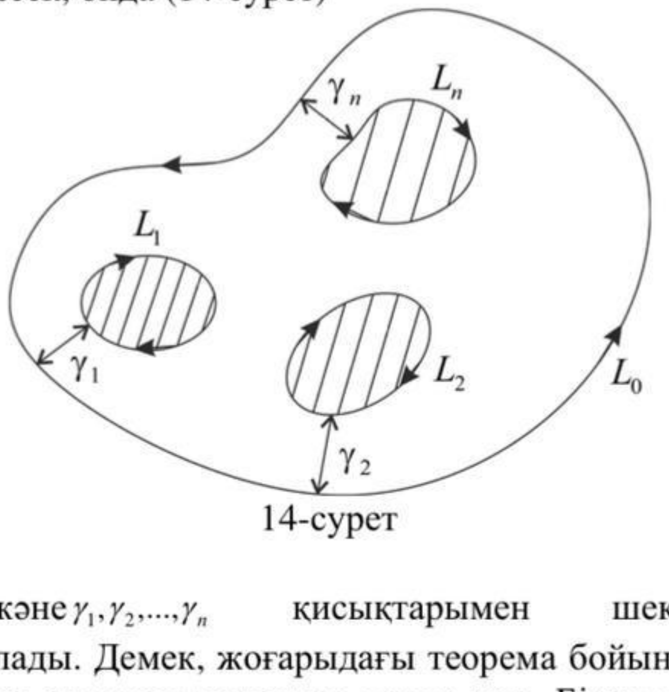
Жоғарыдағы теореманы көпбайланысты облысқа дәлелдеуге болады.

Тоерема. Егер $f(z)$ функциясы $L_0, L_1, L_2, ..., L_n$ қисықтарымен шектелген көпбайланысты D облысында аналитикалық және тұйық $\overline{D}$ облысында үзіліссіз болса, онда

$$\int_L f(z)dz = 0,$$

мұнда L дегеніміз $L_0, L_1, L_2, ..., L_n$ қисықтарынан тұратын D облысының толық шекарасы, $L = L_0 + L_1 + L_2 + ... + L_n$.

Дәлелдеу. Егер L_0 шекарасын $L_1, L_2, ..., L_n$ шекараларыменқосатын $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ қисықтарын жүргізсек, онда (14-сурет)



14-сурет

$L_0, L_1, L_2, ..., L_n$ және $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ қисықтарымен шектелген облыс бірбайланысты болады. Демек, жоғарыдағы теорема бойынша бұл облыстың шекарасы бойынша алынған интеграл нөлге тең. Бірақ көмекші $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ қисықтарының бойымен алынған интеграл қарама-қарсы бағытта екі рет өткендіктен интегралдың 2°-қасиеті бойынша, қосылғанда бұл интегралдар жойылады. Олай болса,

$$\int_{L_0^+} f(z)dz + \int_{L_1^-} f(z)dz + ... + \int_{L_n^-} f(z)dz = 0$$

(L_i – дің жоғарыдағы «+», «–» индексі интегралдау бағытын көрсетеді. Оң бағытта интегралдағанда облыс әрқашан сол жақта қалып отырады.)

Салдар. Егер $f(z)$ функциясы бірбайланысты D облысында аналитикалық болса, онда бұл функцияның интегралы интегралдау жолына тәуелсіз, тек бастапқы z_0 және соңғы z_1 нүктесіне ғана тәуелді.

Дәлелдеуі жоғарыдағы теоремадан шығады.

Теорема. Егер $f(z)$ функциясы бірбайланысты D облысында аналитикалық, ал тұйық $\overline{D}$ облысында үзіліссіз болса, онда $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ функциясын D облысында дифференциалдауға болады және

$$F'(z)=f(z)$$

Дәлелдеу. Өсімшелердің қатынасын аламыз:

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\left(\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta-\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta\right)=$$

$$=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta$$

Жоғарыдағы салдарды ескердік. Интегралдың 1°-қасиеті бойынша $\int_a^b dz=b-a,$ онда $\int_z^{z+\Delta z} d\zeta=\Delta z,$ демек

$$f(z)=\frac{f(z)}{\Delta z}\cdot\Delta z=\frac{f(z)}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} d\zeta=\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} f(z)d\zeta.$$

Төмендегі өрнекті бағалайық:

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|\le\frac{1}{|\Delta z|}\int_z^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)|\,d\zeta\le$$

$$\le\frac{1}{\Delta z}\max_{\zeta\in[z,z+\Delta z]}|f(\zeta)-f(z)|\cdot|\Delta z|=\max_{\zeta\in[z,z+\Delta z]}|f(\zeta)-f(z)|$$

Егер $f(z)$ функциясының үзіліссіз екенін ескерсек, $\forall\varepsilon>0$ саны үшін $\exists\delta>0:|\Delta z|<\delta$ болғанда

$$\max_{\zeta\in[z,z+\Delta z]}|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$$

теңсіздігі орындалады, демек

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|<\varepsilon$$

Бұл теңсіздіктен

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=F'(z)=f(z)$$

теңдігі шығады.

Дәлелденген теорема бойынша комплекс айнымалы функция үшін анықталмаған интеграл ұғымын енгізуге болады.

Егер D облысында $f(z)$ функциясы үшін $F'(z)=f(z)$ теңдігі орындалса, онда аналитикалық $F(z)$ функциясы $f(z)$ функциясының алғашқы функциясы деп, ал алғашқы функциялар жиыны анықталмаған интеграл деп аталады.

$$\int f(z)dz = F(z) + c$$

Бұдан *Ньютон-Лейбниц формуласы* шығады:

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = F(z) - F(z_0)$$

Аналитикалық функциялар үшін математикалық талдау курсындағы интегралдар кестесі өзгеріссіз қалады. Мысалы:

$$\int e^z dz = e^z + c, \int \sin z dz = -\cos z + c, \int z^3 dz = \frac{z^4}{4} + c, \dots$$

Егер $f(z)$ және $g(z)$ функциялары бірбайланысты D облысында аналитикалық болса және $z_0 \in D,\ z_1 \in D,$ онда бөліктеп интегралдау формуласы орындалады:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\varphi'(z)dz = \left[f(z)\cdot\varphi(z)\right]_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} f'(z)\varphi(z)dz$$

3-мысал. $\int_1^i (2z^3 - 3iz)\,dz$ интегралын есептеңіз.

Шешуі. $(2z^3 - 3iz)$ функциясы бүкіл комплекс жазықтықта аналитикалық болғандықтан, Ньютон-Лейбниц формуласын қолданамыз.

$$\int_1^i (2z^3 - 3iz)\,dz = \left(\frac{z^4}{2} - 3i\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_1^i = \frac{1}{2} + \frac{3i}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3i}{2} = 3i$$

4-мысал. $\int_0^i (z+i)\sin z\,dz$ интегралын есептеңіз.

Шешуі. $f(z) = z + i,\ \varphi(z) = \sin z$ функциялары аналитикалық болғандықтан бөліктеп интегралдау формуласын қолданамыз.

$$\int_0^i (z+i)\sin z\,dz = \int_0^i (z+i)(-\cos z)'\,dz = (z+i)(-\cos z)\big|_0^i -$$

$$-\int_0^i (-\cos z)\,dz = -2i\cos i + i + \sin z\big|_0^i =$$

$$= -2i\cos i + i + \sin i = -2ich1 + i + ish1 =$$
$$= (1 + sh1 - 2ch1)\cdot i$$

Пайдаланылған әдебиеттер:

1. Төлегенова М. Б., Қойлышев У.Қ. Комплекс айнымалы функциялар теориясы және Амалдық есептеу. Оқу құралы. Қазақ ун-ті, 2021. Қазақша, орысша, ағылшынша.
2. Евграфов М.А. Аналитические функции. М.: Наука, 1991 (предыдущие издания 1965, 1967).
3. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть 1. М.: Наука, 1985. (Предыдущие издания: 1968, 1976).
4. Сборник задач по теории аналитических функций. Под ред. М.А. Евграфова. Изд. 2-е доп. М.: Наука,1972.
5. Кангужин Б.Е. Теория функций комплексного переменного. Алматы. Қазақ университеті, 2007.